

Diese Umklappmechanismen sind an die Molekülanordnungen der Alkohole gebunden. Da mit diesen Anordnungen die Konzentrationsabhängigkeit des elektrischen Dipolmoments<sup>17</sup> und die Momentkompensation der Zweiermoleküle erklärt werden, ist es wahrscheinlich, daß diese Umklappmechanismen an der Absorption des Schalles mit beteiligt sind. Es ist allerdings nicht ohne weiteres zu übersehen, in welchen Frequenzbereichen sich diese Absorption bemerkbar macht. Der Umklappmechanismus, bei dem die Alkoholradikale beteiligt sind, dürfte bei tieferen Frequenzen, die Mechanismen aber, bei denen nur die OH-Gruppen maßgebend sind, bei wesentlich höheren Frequenzen — im Verhältnis zu der hier benutzten Meßfrequenz von rund 10 MHz — auftreten.

#### c) Streckung der Assoziationsketten

Die gewinkelte Assoziationskette kann in die gestreckte Form übergeführt werden und umgekehrt. Für diesen Prozeß ist die Energiedifferenz der beiden Zustände maßgebend.

Dieser Prozeß wird nur bei längeren Assoziationsketten auftreten. Da in der Mischung  $\text{CCl}_4$ — $\text{C}_6\text{H}_5\text{OH}$  bei der Konzentration des Schallabsorptionsmaximums neben Einer- und Zweier-Molekülen keine höheren Komplexe vorhanden sind, scheidet dieser Mechanismus für die Deutung der Erscheinungen aus.

#### d) Rotation der OH-Gruppen

Bei monomeren Alkoholmolekülen ist die OH-Gruppe um die CO-Bindung als Achse beweglich. Für diesen Prozeß ist die Rotationsenergie der OH-Gruppen maßgebend.

In Mischungen von  $\text{CCl}_4$  mit  $\text{C}_6\text{H}_5\text{NH}_2$ ,  $\text{C}_6\text{H}_5\text{NO}_2$ ,

<sup>23</sup> E. Fischer u. R. Fessler, Z. Naturforschg. **8a**, 178 [1953].

$\text{C}_6\text{H}_5\text{CHO}$ ,  $\text{C}_6\text{H}_5\text{OCH}_3$ ,  $\text{C}_6\text{H}_5\text{COCH}_3$  ist kein Schallabsorptionsmaximum vorhanden, obwohl diese Flüssigkeiten drehbare Gruppen mit mehr oder weniger gehemmter Rotation besitzen<sup>20, 21, 23</sup>. Die Rotation der OH-Gruppen dürfte damit als Absorptionsursache für die Schallabsorptionsmaxima auscheiden. Dafür spricht auch die Tatsache, daß im System  $\text{CCl}_4$ — $n$ - $\text{C}_3\text{H}_7\text{OH}$  die Schallabsorption bei 0,5 Mol-% Alkohol kleiner ist als im reinen  $\text{CCl}_4$  und im Schallabsorptionsmaximum (Abb. 6,  $T=35^\circ\text{C}$ ). Dieses System verhält sich also bis zu dieser Konzentration so, wie es bei fehlendem Absorptionsmaximum zu erwarten wäre. Erst bei Konzentrationen  $> 0,5$  Mol-% tritt nach der Entstehung von Zweiermolekülen das Absorptionsmaximum auf.

Es ist zu beachten, daß die Zuordnung des Absorptionsmaximums zu einem definierten Relaxationsprozeß sehr schwierig ist, da zur experimentellen Bestimmung der beiden Größen „Aktivierungsenergie und Relaxationszeit“ die Frequenzabhängigkeit der Schallabsorption in einem weiten Frequenzbereich notwendig ist. Dies ist vor allen Dingen erforderlich, um die Konzentrationsabhängigkeit der Relaxationszeit über den ganzen Konzentrationsbereich zu verfolgen und eine Trennung eventuell mehrerer Relaxationsprozesse im Frequenzbereich zu erzielen.

Meinem verehrten Lehrer, Herrn Prof. Dr. H. O. Kneiser, bin ich für die Anregung und Förderung dieser Arbeit zu großem Dank verpflichtet. Herrn Dr. A. Weller danke ich für zahlreiche Beiträge aus dem Gebiet der physikalischen Chemie.

## Die Selbstwechselwirkung des Elektrons\*

Von RUDOLF HAAG

Aus dem Institut für Theoretische Physik der Universität München

(Z. Naturforschg. **10a**, 752—761 [1955]; eingegangen am 23. Juni 1955)

Ein Teil der Schwierigkeiten der Quantentheorie der Wellenfelder beruht auf einem charakteristischen Unterschied zwischen Mechanik und Feldtheorie, den wir durch das Stichwort „Selbstwechselwirkung“ bezeichnen möchten. Das Problem besteht in der klassischen Physik wie in der Quantenphysik in analoger Weise. Es wird hier gezeigt, daß es für die Wechselwirkung von Elektron und elektromagnetischem Feld in der klassischen Physik weitgehend befriedigend gelöst ist durch die von Dirac 1938 angegebene Theorie, während die von Eliezer vorgeschlagenen Verallgemeinerungen nicht annehmbar sind. Bei der hier vertretenen Auffassung von Diracs Theorie wird das Paradoxon der Selbstbeschleunigung bereits durch die Voraussetzungen ausgeschlossen, so daß Diracs Finalbedingung nicht als eine künstliche Nebenbedingung erscheint, sondern als wesentlicher Bestandteil der Bewegungsgleichungen. Die Theorie hat damit „nicht lokalen“ Charakter, obgleich das Elektron in gewisser Hinsicht als punktförmig vorausgesetzt wird. Existenz und Eindeutigkeit der Lösung ist gewährleistet in einem weiteren Bereich von Anfangsbedingungen; Schwierigkeiten bestehen bei sehr starken und rasch veränderlichen Feldern. Das Verhältnis von Diracs Theorie zur konventionellen Elektrodynamik wird diskutiert.

Diese Arbeit handelt von der klassisch physikalischen Beschreibung der Wechselwirkung eines Elektrons mit einem elektromagnetischen Feld. Dieses oft diskutierte Thema wird hier nochmals auf-

gegriffen im Hinblick auf die Schwierigkeiten der Quantentheorie der Wellenfelder.

\* Teilweise vorgetragen auf der theoret. phys. Arbeits-tagung in Oberwolfach, April 1955.



Dieses Werk wurde im Jahr 2013 vom Verlag Zeitschrift für Naturforschung in Zusammenarbeit mit der Max-Planck-Gesellschaft zur Förderung der Wissenschaften e.V. digitalisiert und unter folgender Lizenz veröffentlicht: Creative Commons Namensnennung-Keine Bearbeitung 3.0 Deutschland Lizenz.

Zum 01.01.2015 ist eine Anpassung der Lizenzbedingungen (Entfall der Creative Commons Lizenzbedingung „Keine Bearbeitung“) beabsichtigt, um eine Nachnutzung auch im Rahmen zukünftiger wissenschaftlicher Nutzungsformen zu ermöglichen.

This work has been digitalized and published in 2013 by Verlag Zeitschrift für Naturforschung in cooperation with the Max Planck Society for the Advancement of Science under a Creative Commons Attribution-NoDerivs 3.0 Germany License.

On 01.01.2015 it is planned to change the License Conditions (the removal of the Creative Commons License condition "no derivative works"). This is to allow reuse in the area of future scientific usage.

Es gibt verschiedene Ursachen für diese Schwierigkeiten. Da sind einerseits die mathematischen Probleme, die damit zusammenhängen, daß wir Systeme mit unendlich vielen Freiheitsgraden beschreiben müssen. Diese Fragen sind in den letzten Jahren weitgehend aufgeklärt worden und können im Augenblick als sekundär betrachtet werden<sup>1</sup>.

Eine zweite Quelle von Schwierigkeiten ist der folgende Unterschied zwischen Mechanik und Feldtheorie. In der üblichen Feldtheorie spricht man, genau wie in der Mechanik, von einer Verkopplung verschiedener Teilsysteme zu einem Ganzen. In unserem Beispiel sind die Teilsysteme das Elektron einerseits und das elektromagnetische Feld andererseits. Existenz und Bestimmungsstücke dieser Teilsysteme werden als Faktum hingegenommen und sind aus der Theorie nicht erklärbar. Es wird lediglich versucht, ihre Wechselwirkung zu beschreiben. Diese Abtrennung des Problems der Wechselwirkung von dem der Existenz der Grundgebilde ist zwar auf die Dauer unbefriedigend, aber im Prinzip widerspruchsfrei durchführbar. In der Mechanik ist nun die Zerlegung des Systems in die Teilsysteme, deren Wechselwirkung beschrieben werden soll, zu jeder Zeit klar und eindeutig bestimmt. Jedes Teilsystem ist für sich allein existenzfähig und die Wechselwirkung verschwindet bei hinreichender Entfernung. Anders in unserem Fall. Das Elektron ist stets von einem elektromagnetischen Feld umgeben. Um also im Sinn der Mechanik von Teilsystemen reden zu können, müßte man das elektromagnetische Feld aufspalten in das „Eigenfeld“ des Elektrons und den Rest, das „Strahlungsfeld“. Die Trennung ergibt sich auch zwanglos in den asymptotischen Bereichen, in denen das Elektron ungestört seine Bahn zieht. Dagegen erscheint es im allgemeinen nicht empfehlenswert zu sein, den Begriff des Eigenfeldes auch im Wechselwirkungsbereich anzuwenden, denn in einer relativistischen Theorie wäre eine solche Definition weder einfach noch willkürfrei.

Wenn wir weiter Punktförmigkeit des Elektrons und unveränderte Gültigkeit der Maxwellschen Gleichungen annehmen, dann bestehen außerdem noch die bekannten Singularitätsschwierigkeiten. Die aus dem Wirkungsprinzip abgeleitete Bewegungsgleichung ist unbestimmt, weil die Feldstärken am Ort des Teilchens singular werden.

All diese Dinge hängen eng zusammen mit dem

Problemkreis der Renormierung der Quantentheorie der Wellenfelder, und wenn man dort zu einer befriedigenderen Formulierung kommen will, so ist es nützlich, zunächst einmal Umschau zu halten nach der einfachsten klassischen Theorie, welche klar und physikalisch sinnvoll die Wechselwirkung zwischen Elektron und Feld beschreibt.

Ich möchte nun hier darlegen, daß die von Dirac formulierte Elektronentheorie<sup>2</sup> tatsächlich diesen Anforderungen entspricht, soweit wir dies im gegenwärtigen Stadium wünschen können. Dagegen sind die Ansätze von Eliezer nicht annehmbar, so daß die Diracsche Theorie vor allen anderen Möglichkeiten durch ihre Einfachheit ausgezeichnet erscheint als die angemessene Formulierung der klassischen Elektrodynamik schlechthin.

Man hat dieser Theorie bisher wenig Vertrauen entgegengebracht. Der Hauptgrund ist wohl, daß bei differentieller Schreibweise des Gleichungssystems physikalisch unsinnige Lösungen möglich erscheinen (Selbstbeschleunigung), die Dirac durch eine „Finalbedingung“ ausschließen mußte. Dies erscheint unnatürlich. Tatsächlich bedeutet es aber nur, daß das Bewegungsgesetz keine Differentialgleichung, sondern eine Integrodifferentialgleichung ist (§§ 1 und 2).

Ferner kann es in gewissen Fällen vorkommen, daß keine Lösung existiert oder daß die Lösung nicht eindeutig bestimmt ist (§ 3). Dies ist möglich, wenn die Feldstärke groß ist und sich in Bereichen von der Größenordnung  $r_0$  (klass. Elektronenradius) stark ändert. Immerhin dürften solche Schwierigkeiten den bisherigen Anwendungsbereich der Quantenelektrodynamik kaum betreffen.

In § 4 dieser Arbeit wird gezeigt, daß die Diracsche Theorie durch ein bestimmtes Limitierungsverfahren aus der üblichen Formulierung der Elektrodynamik gewonnen werden kann. Es wird gewissermaßen nur der unbestimmten Lorentz-Kraft mit Hilfe eines gewissen Grenzprozesses ein wohldefinierter Sinn gegeben.

## § 1. Die Theorien von Dirac und von Eliezer

Aus Gründen der Einfachheit beschränken wir uns in dieser Arbeit auf das Einelektronenproblem, d. h. streng genommen auf die Wechselwirkung eines

<sup>1</sup> Vgl. etwa die Übersicht in der Arbeit von R. Haag, Dan. Mat. Fys. Medd. **29**, Nr. 12 [1955].

<sup>2</sup> P. A. M. Dirac, Proc. Roy. Soc. A **167**, 148 [1938].

elektromagnetischen Wellenzuges mit einem Elektron. Statische Felder sind als Grenzfälle eines Mehrteilchenproblems aufzufassen (unendlich schwere Teilchen als Quellen des Feldes) und fallen eigentlich außerhalb des Rahmens dieser Betrachtung. Lediglich bei der Diskussion der Paradoxa in § 3 werden wir auch auf diesen Fall eingehen müssen. Hier, bei der Ableitung der Grundgleichungen, sei dagegen ausdrücklich nur das physikalische Problem der Streuung von Licht an einem Elektron ins Auge gefaßt.

Wenn der Wellenzug nur eine endliche Gesamtenergie besitzt, dann kann seine Begegnung mit dem Elektron nur eine endliche Zeit andauern. Wir wissen also, daß in den asymptotischen Bereichen  $t = -\infty$  und  $t = +\infty$  das Elektron sich gleichförmig bewegen muß. Die asymptotischen Vierergeschwindigkeiten seien beziehungsweise  $u_\mu^{\text{in}}$  und  $u_\mu^{\text{out}}$ . „Eigenfeld“ des Elektrons wird man in diesen Bereichen dasjenige Feld nennen können, das im Ruhesystem ein reines Coulomb-Feld ist. Wir sagen dafür der Kürze halber das „mitgeführte Coulomb-Feld“  $F_{\mu\nu}^{\text{Coul}}$ . Der Unterschied zwischen Gesamtfeld und mitgeführtem Coulomb-Feld für  $t = -\infty$  heißt „einlaufendes Strahlungsfeld“

$$F_{\mu\nu}^{\text{in}} = F_{\mu\nu} - F_{\mu\nu}^{\text{Coul}}(u^{\text{in}}) \quad \text{für } t \rightarrow -\infty. \quad (1)$$

Wir setzen nun die Gültigkeit der Maxwell'schen Gleichungen voraus:

$$F_{\mu\nu} = \partial A_\nu / \partial x_\mu - \partial A_\mu / \partial x_\nu, \quad (2)$$

$$\partial A_\mu / \partial x_\mu = 0, \quad (3)$$

$$\square A_\mu = -j_\mu. \quad (4)$$

Dann können wir (1) in eine für beliebige Zeiten gültige Gleichung umschreiben. Eine partikuläre Lösung der Maxwell-Gleichungen ist das retardierte Feld der Stromverteilung, das sich aus den Potentialen

$$A_\mu^{\text{Ret}}(x) = \int D_{\text{Ret}}(x-x') j_\mu(x') dx' \quad (5)$$

ableitet. Es ist dadurch ausgezeichnet, daß es für  $t \rightarrow -\infty$  gerade in das mitgeführte Coulomb-Feld zu dieser Zeit übergeht, denn zu  $F^{\text{Ret}}$  tragen ja nur die zeitlich früheren Punkte der Weltlinie des Elektrons bei und für diese ist bei  $t \rightarrow -\infty$  das Elektron in gleichförmiger Bewegung. Wir können also schreiben

$$F_{\mu\nu}(x) = F_{\mu\nu}^{\text{in}}(x) + F_{\mu\nu}^{\text{Ret}}(x), \quad (6)$$

wenn wir  $F^{\text{in}}$  als Lösung der *homogenen* Maxwell-Gleichungen definieren, die den Randbedingungen (1) genügt, also ableitbar aus einem Potential  $A_\mu^{\text{in}}$

mit

$$\square A_\mu^{\text{in}} = 0. \quad (7)$$

In ganz analoger Weise sei auch das Potential des auslaufenden Strahlungsfeldes  $F^{\text{out}}$  für beliebige Zeiten erklärt als Lösung von

$$\square A_\mu^{\text{out}} = 0 \quad (8)$$

mit den Randbedingungen

$$F_{\mu\nu}^{\text{out}} = F_{\mu\nu} - F_{\mu\nu}^{\text{Coul}}(u^{\text{out}}) \quad \text{für } t \rightarrow +\infty. \quad (9)$$

Für  $t \rightarrow +\infty$  beschreibt der in die Zukunft weisende Ast der Weltlinie eine gleichförmige Bewegung. Es ist also dort das mitgeführte Coulomb-Feld mit dem avancierten Feld identisch. Daraus folgt die Verknüpfung zwischen ein- und auslaufendem Strahlungsfeld und ihre Beziehung zum Gesamtfeld:

$$F_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}^{\text{in}} + F_{\mu\nu}^{\text{Ret}} = F_{\mu\nu}^{\text{out}} + F_{\mu\nu}^{\text{Av}}. \quad (10)$$

Es erschien mir notwendig, diese an sich geläufigen Dinge so ausführlich abzuhandeln, da offenbar gewisse Vorstellungen über die Bedeutung der retardierten und der avancierten Felder weit verbreitet sind, die zu Fehlschlüssen führen. Zum Beispiel ist es sinnlos zu sagen, das Eigenfeld des Elektrons sei das retardierte Feld oder das avancierte Feld oder irgend eine Linearkombination der beiden. Vielmehr müßte man als Eigenfeld etwas definieren, das für  $t = -\infty$  in  $F^{\text{Ret}}$  und für  $t \rightarrow +\infty$  in  $F^{\text{Av}}$  übergeht. Man sieht daraus schon, daß eine kovariante Definition des Eigenfeldes während des ganzen Vorgangs nicht frei von Willkür gegeben werden kann und ich möchte daher auf den Begriff Eigenfeld außerhalb der asymptotischen Bereiche verzichten. Ferner hat die Verwendung von  $F^{\text{Ret}}$  in (6) nichts mit dem Kausalprinzip zu tun<sup>3</sup>. Es ist lediglich ein Ausdruck für das asymptotische Verhalten des Systems für  $t \rightarrow -\infty$  und impliziert keine „zusätzliche Annahme“ der Theorie, die abgeändert werden könnte. Wir müssen daher den Ansatz von Eliezer<sup>4</sup> ablehnen, der darin besteht, an Stelle von (6) zu setzen

$$F_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}^{\text{ext}} + F_{\mu\nu}^{\text{Ret}} + k(F_{\mu\nu}^{\text{Ret}} - F_{\mu\nu}^{\text{Av}}). \quad (11)$$

Selbstverständlich könnte (11) als Definitionsgleichung für ein sogenanntes äußeres Feld  $F^{\text{ext}}$  aufgefaßt werden. Dieses hätte aber dann keine einfache

<sup>3</sup> Hierauf hat in anderem Zusammenhang P. Havas hingewiesen, dem ich an dieser Stelle für einige frühere Diskussionen danken möchte.

<sup>4</sup> C. J. Eliezer, Rev. Mod. Phys. 19, 147 [1947].

physikalische Bedeutung und offensichtlich entspricht eine solche Deutung auch nicht der Absicht Eliezers, denn er wünscht ja nicht eine Umschreibung, sondern eine Abänderung des Gleichungssystems.

Bisher war nur die Gültigkeit der Maxwell'schen Gleichungen vorausgesetzt worden. Als zweites tritt nun die Annahme hinzu, das Elektron sei punktförmig. Die Ortskoordinaten der Weltlinie seien  $z(s)$  ( $s$  Eigenzeit). „Punktförmigkeit“ heißt, daß die Stromdichte gegeben ist durch

$$j_\mu(x) = e \int u_\mu(s) \delta(x - z(s)) ds; \quad u_\mu = dz_\mu/ds. \quad (12)$$

Die retardierten und avancierten Potentiale sind dann durch die Weltlinie festgelegt. Man erhält die bekannten Ausdrücke von Liénard und Wiechert.

Als Drittes verlangen wir die Erhaltung von Gesamtenergie und -impuls bei dem Streuprozeß:

$$m u_\mu^{\text{in}} + P_\mu^{\text{in}} = m u_\mu^{\text{out}} + P_\mu^{\text{out}}; \quad (13)$$

$m$  ist dabei die experimentelle Masse des Elektrons.  $P^{\text{in}}$  bzw.  $P^{\text{out}}$  bedeuten den Energie-Impulsvektor des einlaufenden bzw. auslaufenden Strahlungsfeldes, und zwar in der Form, wie er in der Maxwell'schen Elektrodynamik definiert wird. Es ist wichtig festzuhalten, daß eine wesentliche Abänderung des Maxwell'schen Ausdrucks für die Feldenergie in (13) auf Grund von physikalischen Erfahrungen auszuschließen ist. Denn es handelt sich ja um die asymptotischen Bereiche, in denen wir eine praktische Isolierung des Strahlungsfeldes vom Elektron haben und die Feldstärken des Strahlungsfeldes überall klein sind.

Die Erhaltungssätze (13) legen zwar die Bewegungsgleichungen des Elektrons nicht eindeutig fest, geben aber doch eine starke Einschränkung der Möglichkeiten, weil sie für beliebige Anfangsbedingungen gelten müssen. Zum Beispiel werden die Eliezerschen Bewegungsgleichungen durch (13) ausgeschlossen. Unter Benutzung der Diracschen Rechnungen läßt sich die Bedingung (13) leicht auf folgende Form bringen<sup>5</sup>:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} [m \dot{u}_\mu - \frac{e}{2} (F_{\mu\nu}^{\text{in}} + F_{\mu\nu}^{\text{out}}) u_\nu] ds = 0. \quad (14)$$

<sup>5</sup> Die Methode zur Ableitung der Bewegungsgleichungen, die hier benutzt wird, folgt weitgehend dem Vorbild von Dirac. Ein begrifflicher Unterschied besteht darin, daß wir uns darauf beschränken, den Erhaltungssatz für den gesamten Stoßprozeß zu formulieren, während Dirac ihn für jeden Teilabschnitt des Prozesses fordert. Dadurch wird die resultierende Bedingung (14) schwächer als die entsprechende bei Dirac, die so lautet: der Integrand von (14)

Der Gedankengang, der zu dieser Umformung führt, sei kurz skizziert. Wir betrachten das Raumzeitgebiet, das zwischen den Zeiten  $t = -T$  und  $t = +T$  ( $T$  sehr groß, aber endlich) liegt und aus dem ein kleiner Schlauch um die Weltlinie des Elektrons herum ausgeschnitten sei, so daß das ganze Gebiet ladungsfrei ist. Es gilt dann auf Grund der Maxwell'schen Gleichungen für den Maxwell'schen Energie-Impulstensor  $T_{\mu\nu}$  des Gesamtfeldes

$$\Phi T_{\mu\nu} d\sigma_\nu = 0.$$

Dabei ist  $d\sigma_\nu$  das Flächenelement des erwähnten Bereiches. Solange wir  $T$  endlich lassen, trägt die Integration über die räumlich unendlich ferne Zylinderfläche nichts bei. An der Begrenzung  $t = +T$  können wir für die Felder in guter Näherung den asymptotischen Ausdruck  $F = F^{\text{out}} + F^{\text{Coul}}(u^{\text{out}})$  setzen. Dies gibt

$$T_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}^{\text{out}} + T_{\mu\nu}^{\text{Coul}} + T'_{\mu\nu}.$$

Das Mischungsglied  $T'$  enthält die Produkte von  $F^{\text{out}}$  und  $F^{\text{Coul}}$  und verschwindet im Grenzfall  $T \rightarrow \infty$  (asymptotisches Verschwinden der Wechselwirkung). Der Beitrag der Grenze  $t = +T$  ist also einfach

$P_\mu^{\text{out}} + P_\mu^{\text{Coul}}(T)$ . Hier ist  $P_\mu^{\text{Coul}}$  der Viererimpuls des mitgeführten Coulomb-Feldes *außerhalb des Schlauches*. Wenn wir den Schlauch so wählen, daß sein Querschnitt im Ruhssystem des Elektrons jeweils eine Kugel vom Radius  $\varepsilon$  ist, dann wird

$$P_\mu^{\text{Coul}}(+\infty) = e^2/2 \varepsilon \cdot u_\mu^{\text{out}}.$$

Analog liegen die Dinge für  $t = -T$ . Schließlich hat Dirac gezeigt, daß der Beitrag, der durch die Integration über die Schlauchoberfläche herrührt, gegeben ist durch

$$e^2/2 \varepsilon \cdot (u_\mu^{\text{out}} - u_\mu^{\text{in}}) - e/2 \cdot \int (F_{\mu\nu}^{\text{in}} + F_{\mu\nu}^{\text{out}}) u_\nu ds.$$

Wir haben also auf Grund der Maxwell'schen Gleichungen die Identität

$$P_\mu^{\text{out}} - P_\mu^{\text{in}} = -e \int \bar{F}_{\mu\nu} u_\nu ds \quad \text{mit} \quad \bar{F} = \frac{1}{2} (F^{\text{in}} + F^{\text{out}}). \quad (15)$$

Die Glieder, die den Schlauchradius enthielten, haben sich weggehoben, wie es sein muß, da  $\varepsilon$  will-

muß ein vollständiges Differential sein. Andererseits ist (14) sicherer, denn man kann wohl Modifikationen des hergebrachten Ausdrucks für die Feldenergie in dem Gebiet der Wechselwirkung zwischen Elektron und Strahlung in Erwägung ziehen, nicht aber in den asymptotischen Bereichen. Außerdem entfällt bei der integralen Betrachtung die Singularitätsschwierigkeit von vornherein.



kürlich ist. Vergleich von (15) und (13) gibt unmittelbar (14).

Die Bewegungsgleichung des Elektrons bleibt trotz (14) noch in weiten Grenzen offen. Man kann, wie dies Bhabha<sup>6</sup> getan hat, noch den Erhaltungssatz des Drehimpulses zur weiteren Einengung der Möglichkeiten heranziehen, aber auch dies legt natürlich die Bewegungsgleichung nicht fest. Wir wissen jedoch, daß in Fällen, in denen die Strahlungsreaktion vernachlässigbar ist, in denen sich also  $F^{\text{in}}$  und  $F^{\text{out}}$  nicht wesentlich unterscheiden, die Bewegungsgleichung

$$m \dot{u}_\mu = e F_{\mu\nu}^{\text{in}} u_\nu$$

gelten muß. Dies legt es zumindest sehr nahe, Gl. (14) dadurch zu genügen, daß man den Integranden den Null setzt:

$$m \dot{u}_\mu = e \bar{F}_{\mu\nu} u_\nu. \quad (16)$$

Jedenfalls besteht kein Anlaß, über diesen einfachsten Ansatz, der allen bisher formulierten Voraussetzungen genügt, hinauszugehen, solange uns nicht andere Unstimmigkeiten dazu zwingen.

Das Gesamtproblem der Wechselwirkung zwischen Elektron und Feld wird beschrieben durch (16) einerseits und (10) andererseits. Denken wir uns nämlich zunächst  $\bar{F}$  gegeben, so können wir zu jeder Anfangsbedingung (Ort und Geschwindigkeit) des Elektrons die Weltlinie nach (16) bestimmen. Danach folgt aus (10) das Feld  $F^{\text{out}} - F^{\text{in}} \equiv F^s$  durch reine Quadratur. Bei gegebenen Anfangsbedingungen des Elektrons ist also jedem Feld  $\bar{F}$  eindeutig ein Feld  $F^s$  zugeordnet und damit ist auch implizit eine Zuordnung von  $F^{\text{out}}$  zu  $F^{\text{in}}$  gestiftet.

Da im allg.  $F^{\text{in}}$  und nicht  $\bar{F}$  gegeben ist, ist es zweckmäßig,  $F^{\text{out}}$  aus (16) zu eliminieren. Dirac hat gezeigt, daß die Differenz zwischen ein- und auslaufendem Feld am Ort des Teilchens in folgender Weise durch die Bahnparameter ausgedrückt werden kann<sup>7</sup>:

$$F_{\mu\nu}^s[z(s)] = -\frac{4}{3} e \cdot (\ddot{u}_\mu u_\nu - \ddot{u}_\nu u_\mu). \quad (17)$$

Man kann also (16) auch schreiben:

$$m \dot{u}_\mu = \frac{2}{3} e^2 (\ddot{u}_\mu - (\dot{u}^2) u_\mu) + e F_{\mu\nu}^{\text{in}} u_\nu. \quad (18)$$

Man muß aber im Auge behalten, daß nicht jede Lösung von (18) zugleich eine von (16) ist, denn

in (16) ist vorausgesetzt, daß für  $t \rightarrow +\infty$  die Bewegung des Elektrons eine gleichförmige ist, d. h. daß  $F^{\text{out}}$  existiert.

Zum Abschluß soll nochmals kurz auf die Eliezer'sche Verallgemeinerung des Diracschen Ansatzes eingegangen werden. Eliezer schreibt statt (18)

$$m \dot{u}_\mu - \frac{2}{3} e^2 (2k+1) (\ddot{u}_\mu - (\dot{u}^2) u_\mu) = e F_{\mu\nu}^{\text{in}} u_\nu. \quad (19)$$

Dabei soll  $k$  irgendeine Konstante sein. Die ursprüngliche Begründung dieses Ansatzes erfolgte auf Grund von (11). Man kann natürlich versuchen, (19) einfach zu postulieren, ohne auf die unzulässige Begründung (11) einzugehen. Dies bedeutet, wie Haber-Schaim<sup>8</sup> gezeigt hat, eine Modifikation des Energie-Impulsensors. Man muß den Maxwell'schen Tensor ergänzen durch

$$T'_{\mu\nu}(x) = k \frac{e^2}{\pi} [(x_\lambda - z_\lambda) \dot{u}_\lambda]^2 \frac{(x_\mu - z_\mu)(x_\nu - z_\nu)}{[(x_0 - z_0) u_0]^6}. \quad (20)$$

Dabei ist  $z$  der Schnittpunkt des rückwärtigen Lichtkegels mit der Weltlinie,  $u_\mu$  und  $\dot{u}_\mu$  sind die Geschwindigkeit bzw. Beschleunigung dort. Dieser Zusatz bedeutet nun tatsächlich eine wesentliche Abänderung der elektromagnetischen Feldenergie, die nicht mit der Erfahrung verträglich ist. Am besten wird dies ersichtlich, wenn man  $k = -1/2$  wählt. Dann fällt in (19) das Strahlungsreaktionsglied völlig weg. Betrachten wir die Streuung des Elektrons an einem statischen Feld, so erleidet das Elektron nach (19) keinen Geschwindigkeitsverlust und der Zusatzterm (20) kompensiert gerade die ganze ausgestrahlte Energie.

## § 2. Die Bewegung des Elektrons im reinen Strahlungsfeld

Wie erwähnt, führt die unkritische Anwendung der Bewegungsgl. (18) zu Paradoxien. Zu ihrer Diskussion wollen wir uns auf die nichtrelativistische Näherung beschränken, in der alle wesentlichen Züge bereits erkenntlich sind. Wir schreiben also statt (18)<sup>9</sup>:

$$m \ddot{\mathbf{r}} - \frac{2}{3} e^2 \ddot{\mathbf{r}} = \mathcal{F}_{(\mathbf{r})}^{\text{in}}; \quad \mathcal{F}^{\text{in}} = e(\mathcal{E}^{\text{in}} + \mathbf{v} \times \mathcal{H}^{\text{in}}). \quad (21)$$

Diese Gleichung ist noch keine ausreichende Formulierung des Bewegungsgesetzes. Man könnte als

<sup>6</sup> H. J. Bhabha, Proc Ind. Acad. Sci. A **10**, 324 [1939].

<sup>7</sup> Die Vorzeichenunterschiede gegenüber Dirac kommen daher, daß wir die Minkowskische Schreibweise benutzen (imaginäre 4. Koordinate).

<sup>8</sup> U. Haber-Schaim, Phys. Rev. **74**, 836 [1948].

<sup>9</sup> Wir benutzen in dieser Arbeit stets solche Einheiten, daß die Lichtgeschwindigkeit dimensionslos gleich 1 wird.

Anfangsbedingungen  $\dot{\mathbf{r}}$ ,  $\mathbf{r}$  und  $\ddot{\mathbf{r}}$  zu irgend einer Zeit vorgeben und erhielte dann im allg. aus der Differentialgleichung eine physikalisch völlig absurde Bewegungsform: nachdem der Wellenzug längst am Elektron vorübergestrichen ist, wächst die Geschwindigkeit exponentiell immer weiter an, d. h.  $F^{\text{out}}$  existiert gar nicht. Es darf also nur eine Auswahl der durch (21) bestimmten Bahnen wirklich zugelassen werden. Dirac hat diese Einschränkung durch eine Finalbedingung charakterisiert:

Zulässig sind nur solche Lösungen von (21), für die  $\ddot{\mathbf{r}} \rightarrow 0$  geht im Limes  $t \rightarrow +\infty$ . Dies bedeutet die Auswahl einer zweiparametrischen Schar aus der dreiparametrischen Lösungsschar von (21), so daß, wie in der Newtonschen Mechanik, die Vorgabe von Anfangsort und -geschwindigkeit die Bahnkurve bereits festlegt. Man kann über die Anfangsbeschleunigung nicht willkürlich verfügen.

Die Beschreibung der Bewegung durch (21) plus zusätzlicher Finalbedingung wurde häufig als unbefriedigend empfunden<sup>10</sup>. Man kann das Bewegungsgesetz jedoch anders formulieren, so daß der physikalische Sinn klarer hervortritt. Die Integrodifferentialgleichung

$$m \ddot{\mathbf{r}}(t) = \alpha \int_0^\infty \ddot{\mathbf{r}}^{\text{in}}(t+\tau) e^{-\alpha\tau} d\tau; \quad \alpha = \frac{3}{2} \cdot m/e^2 \quad (22)$$

vereinigt Diracs Finalbedingung mit (21) und läßt eine sehr anschauliche Deutung zu: Die effektive Kraft auf das Elektron zur Zeit  $t$  ist eine Art Mittelwert der Lorentz-Kraft des einlaufenden Feldes über ein Zeitintervall der Größenordnung  $1/\alpha \sim 10^{-23}$  sec. Für  $t \rightarrow +\infty$  verschwindet die Beschleunigung notwendig, weil für beliebige Bahnen  $\lim_{t \rightarrow \infty} \ddot{\mathbf{r}}^{\text{in}}(t) = 0$ . Wenn das einlaufende Feld keine Frequenzen enthält, die die Größenordnung  $\alpha$  erreichen, dann erhalten wir eine gute Näherung für den Geschwindigkeitsverlauf, wenn wir in (22)  $\ddot{\mathbf{r}}^{\text{in}}(t+\tau)$  durch  $\ddot{\mathbf{r}}^{\text{in}}(t)$  ersetzen und kommen damit zur Bewegungsgleichung

$$m \ddot{\mathbf{r}} = \ddot{\mathbf{r}}^{\text{in}} \quad (23)$$

zurück. Die Lösungen von (22) sind also sicher physikalisch sinnvoll, soweit wir dies an Hand der vorliegenden klassisch-physikalischen Erfahrungen beurteilen können. Die Wirkung der Strahlungsreaktion besteht einfach darin, daß die Kraftwirkung des

einlaufenden Feldes schon ein wenig früher merklich wird als nach (23). Man hat also eine leichte Akausalität. Sie wirkt sich darin aus, daß ein Prozeß, bei dem zwei elektromagnetische Pulse, die in einem zeitlichen Abstand von der Größenordnung  $1/\alpha$  aufeinanderfolgen, nicht mehr in zwei getrennte Prozesse aufgegliedert werden kann. Sowie jedoch der Abstand der Pulse groß gegen  $1/\alpha$  ist, wird die Interferenz der Teilprozesse vernachlässigbar.

### Existenz und Eindeutigkeit der Lösung

Es sei das Feld  $F^{\text{in}}$  gegeben und Ort und Geschwindigkeit des Elektrons zur Zeit  $t=0$ . Da jede Lösung von (22) zugleich eine von (21) ist, können wir folgendermaßen vorgehen: Wir wählen eine Anfangsbeschleunigung  $\ddot{\mathbf{r}}$  und berechnen nach (21) die Bahnkurve. Diese Bahn setzen wir auf der rechten Seite von (22) ein und erhalten eine Anfangsbeschleunigung  $\ddot{\mathbf{r}}'$ . Das Integral muß sicher existieren, da für beliebige Orte  $\lim_{t \rightarrow \infty} \ddot{\mathbf{r}}^{\text{in}}(t) = 0$ . Wir wollen außerdem  $F^{\text{in}}$  als beschränkt voraussetzen. Dann liegt  $\ddot{\mathbf{r}}'$  in einem endlichen Bereich  $\mathfrak{B}$ . Wir können also  $\ddot{\mathbf{r}}$  von vornherein auf  $\mathfrak{B}$  beschränken und die Zuordnung von  $\ddot{\mathbf{r}}'$  zu  $\ddot{\mathbf{r}}$  ist dann eine stetige Abbildung des Bereiches  $\mathfrak{B}$  auf sich. Eine Lösung unseres Problems ist jeder Wert  $\ddot{\mathbf{r}}$ , für den

$$\ddot{\mathbf{r}}'[\ddot{\mathbf{r}}] = \ddot{\mathbf{r}} \quad (24)$$

ist, also jeder Fixpunkt der Abbildung. Die Lösung der Integrodifferentialgl. (22) läuft damit auf die Lösung des gewöhnlichen Gleichungssystems mit 3 Unbekannten (24) hinaus. Eine Lösung existiert sicher und ist eindeutig bestimmt, wenn der Abstand zweier Ausgangspunkte  $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$  aus  $\mathfrak{B}$  stets größer ist als der Abstand der Bildpunkte  $\mathbf{r}_1', \mathbf{r}_2'$ . Dies bedeutet im wesentlichen, wenn auch nicht in voller Allgemeinheit, daß der Maximalwert der Änderung von  $e/m \cdot F^{\text{in}}$  auf einer Strecke  $1/\alpha$  klein sein soll gegen  $\alpha$ :

$$\text{Max} \frac{e}{m} \left| \frac{\partial F_i^{\text{in}}}{\partial x_k} \right| \ll \alpha^2.$$

Physikalisch heißt das: das Verhältnis der Feldenergie von  $F^{\text{in}}$  in einem Volumen vom Durchmesser  $r_0$  zur Ruhenergie des Elektrons soll klein sein gegen  $\alpha^2/\omega^2$ , wobei  $\omega$  die Größenordnung der Frequenz von  $F^{\text{in}}$  angibt. Dies läßt sich auch anschaulich ver-

<sup>10</sup> Siehe etwa H. Steinwedel, Fortschritte d. Physik 1, 7 [1953].

stehen, denn die Bedingung bedeutet, daß die Ver-rückung des Elektrons infolge der ungenau bekannten Beschleunigung bei der Berechnung des Integrals (22) keine Rolle spielt.

Ein instruktives Beispiel für diese Verhältnisse wird in § 3 besprochen.

### § 3. Das Elektron in statischen Feldern

In der Diracschen Theorie gibt es keine strahlungslosen Bahnen des Elektrons in einem Kraftfeld. Wegen der Punktförmigkeit des Elektrons einerseits und der Beschränkung der Wirkungsausbreitung auf den Lichtkegel andererseits ist das Feld  $F^s$  in einem Punkt  $x$  nur vom Bewegungszustand des Elektrons in *einem* Punkt seiner Weltlinie (dem Lichtpunkt von  $x$ ) abhängig und wenn irgendwo längs seiner Bahn das Elektron eine Beschleunigung erfährt, so ist damit  $F^s$  notwendig von Null verschieden. Es gibt also auch beim Mehrkörperproblem keine stationär gebundenen Zustände. Die physikalischen Fragestellungen betreffen stets nur Streu- oder Einfangprobleme. Zum Beispiel müssen wir beim Kepler-Problem davon ausgehen, daß das Elektron ursprünglich aus dem Unendlichen kommt und dann infolge des Strahlungsverlustes vom Kern eingefangen wird. Es ist daher stets  $F^{\text{in}}$  definiert und die Integralgleichung (22) für die Bewegung gilt weiterhin, wenn wir zu  $F^{\text{in}}$  noch die von den anderen Teilchen erzeugten retardierten Felder hinzufügen.

#### Streuprobleme

Es besteht kein wesentlicher Unterschied gegenüber den Verhältnissen, die im letzten Paragraphen besprochen wurden. Wir wollen hier nur ein Beispiel diskutieren: die Streuung an der Potentialschwelle. Es ist instruktiv für das Auftreten mehrdeutiger Lösungen. Das Elektron kommt von  $x = -\infty$ . Anfangsgeschwindigkeit sei  $v$ , Endgeschwindigkeit  $u$ . Für einen sprunghaften Potentialanstieg hat Bopp<sup>11</sup> gefunden, daß mehrere Lösungen existieren bei vorgegebener Anfangsgeschwindigkeit. Das Elektron kann entweder reflektiert werden oder durchgehen und im letzten Fall gibt es noch zwei Möglichkeiten für den Energieverlust. Wir wollen nun untersuchen, wie sich die Verhältnisse ändern, wenn der Potentialanstieg stetig erfolgt, also das

Feld nicht singulär wird. Die Diskussion geschieht am einfachsten an Hand der Differentialgleichung (21) mit Finalbedingung. Wählen wir  $1/\alpha$  als Zeiteinheit, dann gilt

$$\ddot{x} - \ddot{x} = F(x)$$

mit

$$F = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 & \text{Bereich I,} \\ -f & \text{für } 0 < x < a & \text{Bereich II,} \\ 0 & \text{für } a < x & \text{Bereich III.} \end{cases}$$

Wir beschränken uns zunächst auf Bahnen, bei denen der Bereich II nur einmal betreten wird. Die allgemeine Lösung im Bereich II ist

$$\dot{x} = b(e^t - 1) - ft + u.$$

Der Zeitpunkt, in dem das Elektron den Bereich II verläßt, sei  $t = 0$ . Dann gibt die Finalbedingung

$$\ddot{x} = 0 \quad \text{für } t = 0, \quad \text{d. h. } b = f.$$

Die Größe  $u$  ist also wirklich die Endgeschwindigkeit.

Die Ankunftszeit des Elektrons an der Grenze zwischen I und II sei  $t = -T$ . Der in II zurückgelegte Weg ist also

$$\begin{aligned} \Delta x &= \int_{-T}^0 \dot{x} dt = uT + f[1 - T + T^2/2 - e^{-T}] \\ &= uT + fZ(T), \end{aligned}$$

wobei wir  $Z(T)$  als Abkürzung für die in der Klammer stehende Funktion gesetzt haben. Die Anschlußbedingungen für Geschwindigkeit und Beschleunigung an der Grenze I/II geben

$$u = v - fT.$$

Wir führen die Parameter ein:

$$\xi = 2af/v^2, \quad \eta = v/f;$$

$\xi$  ist das Verhältnis von Potentialunterschied und ursprünglicher kinetischer Energie.

Im Fall des Durchgangs muß  $\Delta x = a$  sein. Dies gibt die Bestimmungsgleichung für  $T$

$$Z'(T) = -\xi \eta^2/2 + \eta T \quad (24)$$

mit

$$Z(T) = T^2 - Z(T) = e^{-T} - 1 + T + T^2/2.$$

Man erkennt leicht an Hand des Bildes der Funktion  $Z'(T)$ , daß (24) stets entweder zwei Lösungen oder keine hat. Den Grenzfall zwischen diesen beiden Möglichkeiten erhält man für solche Wertepaare  $\xi, \eta$ , für die die Gerade durch den Punkt

<sup>11</sup> F. Bopp, Ann. Phys. Lpz. 42, 573 [1943].

$(0, -\xi\eta^2/2)$  mit der Steigung  $\eta$  die Kurve  $Z'(T)$  gerade berührt. Die Bedingung dafür lautet

$$\sqrt{\eta^2(1-\xi) - 2\eta + 4} = 1 + \exp[-(\eta - 2 + \sqrt{\eta^2(1-\xi) - 2\eta + 4})].$$

Dies ist die Grenzkurve D in Abb. 1. Das Elektron kann die Potentialschwelle nur überwinden, wenn seine Anfangsgeschwindigkeit so groß ist, daß  $(\xi, \eta)$  unterhalb der Kurve D liegt. Für  $\eta \rightarrow \infty$  geht auf D  $\xi \rightarrow 1$ , d. h. bei sehr langsamem Potentialanstieg ist, wie es sein muß, der Strahlungsverlust vernachlässigbar. Wenn das Potential sehr rasch ansteigt, wird der Strahlungsverlust groß und erreicht schließlich die halbe kinetische Energie.

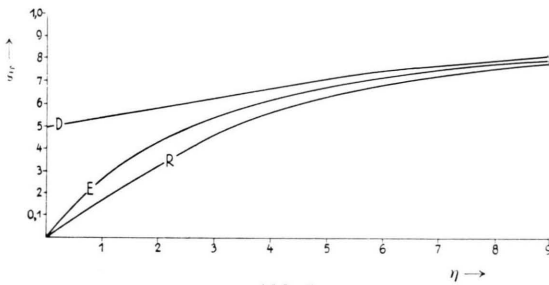


Abb. 1

$$\sqrt{\eta^2(1-\xi) - 2\eta(T+1) + T^2 + 2T} = 1 - \exp[-(T - \eta + \sqrt{\eta^2(1-\xi) - 2\eta(T+1) + T^2 + 2T})]$$

gilt. Dies gibt die Grenzkurve R im Diagramm.

Wir haben bisher noch solche Bahnen außer acht gelassen, die den Bereich II mehrfach durchqueren. Der einfachste Fall dieser Art liegt vor, wenn das Elektron von I kommend bis nach III vordringt, dort umkehrt und in I endet. Die Diskussion ist mühsamer und soll hier nicht wiedergegeben werden. Das wesentliche Ergebnis ist, daß auch solche Bahnen nur in einem Teilbereich zwischen den Kurven D und R möglich sind.

Der Zustandsbereich, in dem sich das Elektron unentschieden verhalten kann, ist im wesentlichen charakterisiert durch  $\eta < 10$ ,  $\xi < 1$ . Dies bedeutet, daß der Potentialanstieg auf einer Strecke von der Größenordnung Elektronenradius erfolgt, und daß dort die Feldstärke so groß ist, daß die Energiedichte von der Größenordnung  $mx^3$  wird. Dies ist im Einklang mit der Abschätzung in § 2.

### Einfangproblem

Wenn die Feldstärke beschränkt ist, so treten auch hier keine wesentlich neuen Gesichtspunkte ins Spiel.

Wie erwähnt, hat – wenn überhaupt ein Durchgang möglich ist – Gl. (24) zwei Lösungen. Dies bedeutet aber noch nicht, daß unser Problem zwei Lösungen hat, denn es kann sein, daß ein Wert von  $T$  größer wird als  $\eta$ , und das würde einen negativen Wert von  $u$  bedeuten, was der Voraussetzung widerspricht. Der Grenzfall, in dem (24) eine Lösung  $T = \eta$  hat, liegt vor, wenn

$$\xi = 2Z(\eta)/\eta^2.$$

Dies ist die Grenzkurve E im  $\xi - \eta$ -Diagramm. Nur für Punkte zwischen den Kurven D und E gibt es also zwei verschiedene Möglichkeiten des Geschwindigkeitsverlustes.

Im Fall der Reflexion ist  $\Delta x = 0$ . Hier lautet also die Bestimmungsgleichung für  $T$

$$Z'(T) = \eta T. \quad (25)$$

Diese Gleichung hat stets gerade eine Lösung. Damit sie Bedeutung für unser Problem hat, muß der Maximalwert von  $x$  auf der Bahn kleiner als  $a$  sein, denn sonst würde das Elektron ins Gebiet III eindringen und wir müßten von anderen Gleichungen ausgehen. Der Grenzfall  $x_{\max} = a$  ist verwirklicht, wenn neben (25) noch

Das Elektron wird infolge des Strahlungsverlustes immer langsamer und kommt schließlich an der Stelle des Potentialminimums zur Ruhe. Ein Beispiel dafür bietet die Bewegung im Oszillatorpotential<sup>12</sup>. Wenn das Feld dagegen singulär wird, dann kann es vorkommen, daß keine Lösung der Bewegungsgleichung existiert. Dies ist der Fall bei den Einfangbahnen des Kepler-Problems. Eliezer konnte zeigen, daß eine physikalisch sinnvolle Pendelbahn dabei nicht existiert<sup>13</sup> und es ist wahrscheinlich, daß sich dieses Ergebnis auch auf die anderen Bahnen übertragen läßt. Die Ursache dafür ist, daß sich das Elektron notwendig am Ende seiner Bahn in beliebig kleinem Abstand vom Kern aufhalten sollte. Mit den singulären Verhältnissen dort kann es aber nicht fertig werden. Daß die Nichtexistenz der Lösung tatsächlich nur mit dem innersten Teil der Bahn zusammenhängt, erkennt man daran, daß eine unseren Erwartungen entsprechende, eindeutige Lösung möglich

<sup>12</sup> Siehe H. Steinwedel<sup>10</sup>.

<sup>13</sup> C. J. Eliezer, Proc. Camb. Phil. Soc. **39**, 173 [1943].



wird, wenn wir das Potential in einem Abstand  $a \gg r_0$  abschneiden. Da nun in der Quantenphysik die Unschärferelation dafür sorgt, daß das Elektron vom Kern ferngehalten wird, kann man hoffen, daß Schwierigkeiten dieser Art dort nicht bestehen.

#### § 4. Vergleich der Diracschen Theorie mit der konventionellen Elektrodynamik

Die Formulierung des Problems, die in § 1 gegeben wurde, ist sehr unähnlich der üblichen Elektrodynamik. Aus den Bewegungsgleichungen ist das tatsächliche Feld zugunsten von  $\vec{F}$  bzw.  $F^{\text{in}}$  eliminiert. Das Feld spielt also nicht mehr die Rolle eines Systems von dynamischen Variablen. In der Quantenphysik heißt das, daß wir in bezug auf das elektromagnetische Feld eine S-Matrix-Theorie haben. Um mehr in Einklang mit dem bekannten Formalismus zu kommen, wollen wir das tatsächliche Feld wieder in die Bewegungsgleichungen einführen. Es ist

$\vec{F} = \frac{1}{2}(F^{\text{in}} + F^{\text{out}}) = F - \frac{1}{2}(F^{\text{Ret}} + F^{\text{Av}}) = F - F^{(\text{T})}$ . Getrennt betrachtet enthält  $F$  ebenso wie  $F^{(\text{T})}$  drei singuläre Glieder. Ist  $r$  der räumliche Abstand des Aufpunkts von der Weltlinie (nicht notwendig im Ruhssystem des Elektrons), dann gibt es einen Term, der mit  $r^{-2}$  unendlich wird, einen, der mit  $r^{-1}$  geht, und einen, der zwar endlich bleibt, aber von der Richtung abhängt. Da  $\vec{F}$  regulär auf der Weltlinie ist, können wir in der Bewegungsgleichung (16) statt  $\vec{F}$  auch seinen Mittelwert in einer Kugel vom Radius  $\varepsilon$  einsetzen, wenn wir am Ende  $\varepsilon$  gegen Null gehen lassen. Eine solche Mittelung löscht in  $F$  und  $F^{(\text{T})}$  die singulären Terme proportional  $r^{-2}$  und  $r^0$  aus, nicht dagegen den Term mit  $r^{-1}$ . Immerhin ist

$$\frac{3}{4\pi\varepsilon^3} \int_{r<\varepsilon} F^{\text{T}} d\vec{r} = \frac{A}{\varepsilon} + B\varepsilon + \dots, \quad (26)$$

d. h. es ist

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \frac{3}{4\pi\varepsilon^2} \int F^{\text{T}} d\vec{r} = 0 \quad \text{auf der Weltlinie.}$$

Wir können also die Diracsche Bewegungsgleichung auch schreiben

$$m \ddot{u}_\mu = e \left( \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \frac{3}{4\pi\varepsilon^2} \int F_{\mu\nu} d\vec{r} \right) u_\nu. \quad (27)$$

Bevor wir (27) weiter diskutieren, soll noch der Beweis von (26) nachgetragen werden. Dirac hat

für das Feld  $F_{\mu\nu}$  in der Nachbarschaft der Weltlinie den folgenden Ausdruck berechnet:

$$F_{\mu\nu}^{\text{T}} = (1 + \gamma_\lambda \dot{u}_\lambda)^{-1/2} \cdot \left[ \frac{\gamma_\nu u_\mu - \gamma_\mu u_\nu}{r^3} + \frac{1 - \gamma_\nu \dot{u}_\nu}{2r} (\dot{u}_\mu u_\nu - \dot{u}_\nu u_\mu) + \frac{1}{8r} (\dot{u}_\nu^2) (u_\mu \gamma_\nu - u_\nu \gamma_\mu) - \frac{1}{2r} (\ddot{u}_\mu \gamma_\nu - \ddot{u}_\nu \gamma_\mu) \right]. \quad (28)$$

Dies ist so zu verstehen: Jedem Aufpunkt  $x$  ist ein Punkt  $z(s)$  der Weltlinie zugeordnet, und zwar derart, daß im Ruhssystem des Elektrons die Punkte  $x$  und  $z$  gleichzeitig sind. Es ist  $\gamma_\mu = x_\mu - z_\mu(s)$  und  $r^2 = \gamma_\nu^2$ . Wir wollen nun die Lage des Aufpunkts nicht durch seinen Abstand  $\gamma_\mu$  von der Weltlinie im momentanen Ruhssystem kennzeichnen, sondern durch seinen räumlichen Abstand  $R$ , gemessen in einem festen Lorentz-System. Wir können den Ausdruck (28) durch Potenzreihenentwicklung nach den Komponenten von  $R$  umrechnen. Es interessieren dabei nur diejenigen Glieder, die für  $R \rightarrow 0$  nicht verschwinden. Für alle Größen  $Y$ , die in (28) auftreten, schreiben wir

$$Y = \sum Y^{(n)};$$

$Y^{(n)}$  sei der Term, der homogen von  $n$ -tem Grad in den Komponenten von  $R$  ist. Es ist nun leicht zu sehen, daß bei allen Größen außer  $r$  die Parität des Terms  $Y^{(n)}$  gegen eine Spiegelung  $\vec{R} \rightarrow -\vec{R}$  gleich  $(-1)^n$  ist. Bei  $r^k$  ist es gerade umgekehrt, wenn  $k$  ungerade ist.

Da in (28) nur ungerade Potenzen von  $r$  auftreten, hat das Entwicklungsglied der Ordnung  $n$  von  $F^{\text{T}}$  die Parität  $(-1)^{n+1}$ . Bei Integration von  $F^{\text{T}}$  über eine Kugelfläche fallen also alle Terme von gerader Ordnung weg, insbesondere die von Ordnung  $-2$  und  $0$ . Dies ist die Aussage von (26).

Der Ausdruck auf der rechten Seite von (27) kann noch etwas vereinfacht werden. Wenn wir die Fourier-Komponenten des Feldes einführen, dann ist

$$F_{\mu\nu}(z+x) = \int Q_{\mu\nu}(k) e^{ik(z+x)} dk.$$

Setzen wir  $x = (\vec{R}, 0)$  und integrieren über  $\vec{R}$  innerhalb einer Kugel vom Radius  $\varepsilon$

$$\int F_{\mu\nu}(z+x) d\vec{R} = \int Q_{\mu\nu}(k) e^{ikz} dk \frac{4\pi}{|\vec{k}|} \int_0^\varepsilon \sin \xi \cdot \xi d\xi.$$

Also

$$\frac{3}{4\pi} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \frac{1}{\varepsilon^2} \int F_{\mu\nu}(z+x) d\vec{R} = \int Q_{\mu\nu}(k) f(|\vec{k}| \varepsilon) e^{ikz} dk$$

mit

$$f(x) = -3 \frac{d^2}{dx^2} \left( \frac{\sin x}{x} \right). \quad (29)$$

Bei endlichem  $\varepsilon$  stellt der Ausdruck (29) ein modifiziertes Feld  $F'(x; \varepsilon)$  dar (das sich allerdings nicht kovariant transformiert).

Man gewinnt  $F'$  aus  $F$ , indem man die Fourier-Komponente  $Q$  durch  $Q f(|\vec{k}| \varepsilon)$  ersetzt. Man kann also  $F'$  auch aus einem Potential  $A'$  ableiten, das aus  $A$  durch denselben Prozeß hervorgeht. Im Limes  $\varepsilon \rightarrow 0$  wird für jeden Punkt außerhalb der Weltlinie  $F' = F$ , dagegen für Punkte auf der Weltlinie  $F' = \bar{F}$ . Dies beruht darauf, daß der Grenzübergang abhängt von

der Reihenfolge. Man muß zuerst den Punkt auf die Weltlinie rücken lassen und dann  $\varepsilon \rightarrow 0$  gehen lassen.

Der hier beschriebene Limitierungsprozeß darf nicht verwechselt werden mit dem sogenannten  $\lambda$ -limiting-Prozeß, den Dirac bei der kanonischen Formulierung seiner Theorie angewandt hat<sup>14</sup>. Diese Formulierung benutzt nämlich nicht das tatsächliche Feld, sondern eine Schar von Feldern  $A_\mu(x; s)$ , die hinsichtlich der Ortsvariablen  $x$  der homogenen Gleichung  $\square A_\mu = 0$  genügen.

<sup>14</sup> P. A. M. Dirac, Proc. Roy. Soc. A **180**, 1 [1942].

## Zur Magneto-Hydrodynamik kompressibler Medien\*

Von R. W. LARENZ

Aus dem Institut für theoretische Physik der Technischen Hochschule Hannover

(Z. Naturforschg. **10a**, 761—765 [1955]; eingegangen am 22. Juni 1955)

In einer konsequenten Theorie des kompressiblen Plasmas muß die Ladungstrennung berücksichtigt werden, besonders dann, wenn makroskopische Geschwindigkeiten auftreten, die mit der Schallgeschwindigkeit vergleichbar oder größer als diese sind. Es wird der Einbau der Ladungstrennung für ein zweikomponentiges Plasma durchgeführt und das System der magneto-hydrodynamischen Gleichungen so umgeformt, daß es nur noch 2 Größen enthält: das Vektorpotential und die Plasmageschwindigkeit.

In den letzten Jahren hat es sich mehr und mehr eingebürgert und als fruchtbar erwiesen, zur Beschreibung von Vorgängen in ionisierten Gasen eine makroskopisch-hydrodynamische Betrachtungsweise heranzuziehen, insbesondere dann, wenn sich das zu untersuchende Plasma über großräumige, kosmische Dimensionen erstreckt, eine Entwicklung, die wohl mit den Arbeiten Alfvéns begonnen hat<sup>1</sup>. Man denkt sich jede der Plasmakomponenten kontinuierlich über den Raum verteilt und für sich entsprechend ihrem Partialdruck einer Eulerschen Bewegungsgleichung gehorchend; gegenüber der gewöhnlichen Hydromechanik betreibt man also hier eine Mechanik *mehrerer* sich gegenseitig durchdringender Continua. Die einzelnen Bewegungsgleichungen sind dabei gekoppelt durch Reibungsglieder, die die Stöße der Plasmakomponenten untereinander repräsentieren, vornehmlich aber durch elektromagnetische Kräfte, die z. Tl. äußeren Ursprungs sein mögen, wesentlich aber durch die Verteilung und Strömung der Ladungsträger selbst bedingt sind. Die elektromagneti-

schen Größen sind ihrerseits wieder durch die Maxwell'schen Gleichungen verbunden.

Die hydrodynamische Betrachtung hat den Vorzug, daß man mit ihrer Hilfe alle diejenigen Effekte mit guter Annäherung beschreiben kann, die wesentlich auf der Anwesenheit und dem Zusammenwirken einer *Vielheit* von Plasmateilchen beruhen, was mit Hilfe der Theorie der Bewegung eines einzelnen Ladungsträgers oder einer gaskinetischen Betrachtungsweise, wenn überhaupt, dann nur unter großen Schwierigkeiten möglich sein dürfte. Streng genommen wird mit der hydrodynamischen Betrachtungsweise die erste Näherung der gaskinetischen durchgeführt.

Die Grundgleichungen dieser makroskopischen Betrachtungsweise finden sich in für unsere Zwecke geeigneter Form nebst einigen prinzipiellen Bemerkungen in Arbeiten von Schlüter<sup>2</sup>, so daß wir uns bei der Aufstellung der Ausgangsgleichungen kurz fassen können. Bisher hat man allerdings fast nur den Fall betrachtet, daß die Dichte der positiven

\* Teilweise vorgetragen auf der Tagung der Nordwestdeutschen Physikalischen Gesellschaft am 27. 4. 1953 in Bad Salzungen.

<sup>1</sup> Zusammenfassende Darstellung: H. Alfvén, *Cosmical Electrodynamics*, Oxford 1950.

<sup>2</sup> A. Schlüter, Z. Naturforschg. **5a**, 72 [1950]; **6a**, 73 [1951].